

*KATEDRA ZA BETONSKE KONSTRUKCIJE I MOSTOVE
STRUČNI STUDIJ GRAĐEVINARSTVA*

BETONSKE KONSTRUKCIJE I

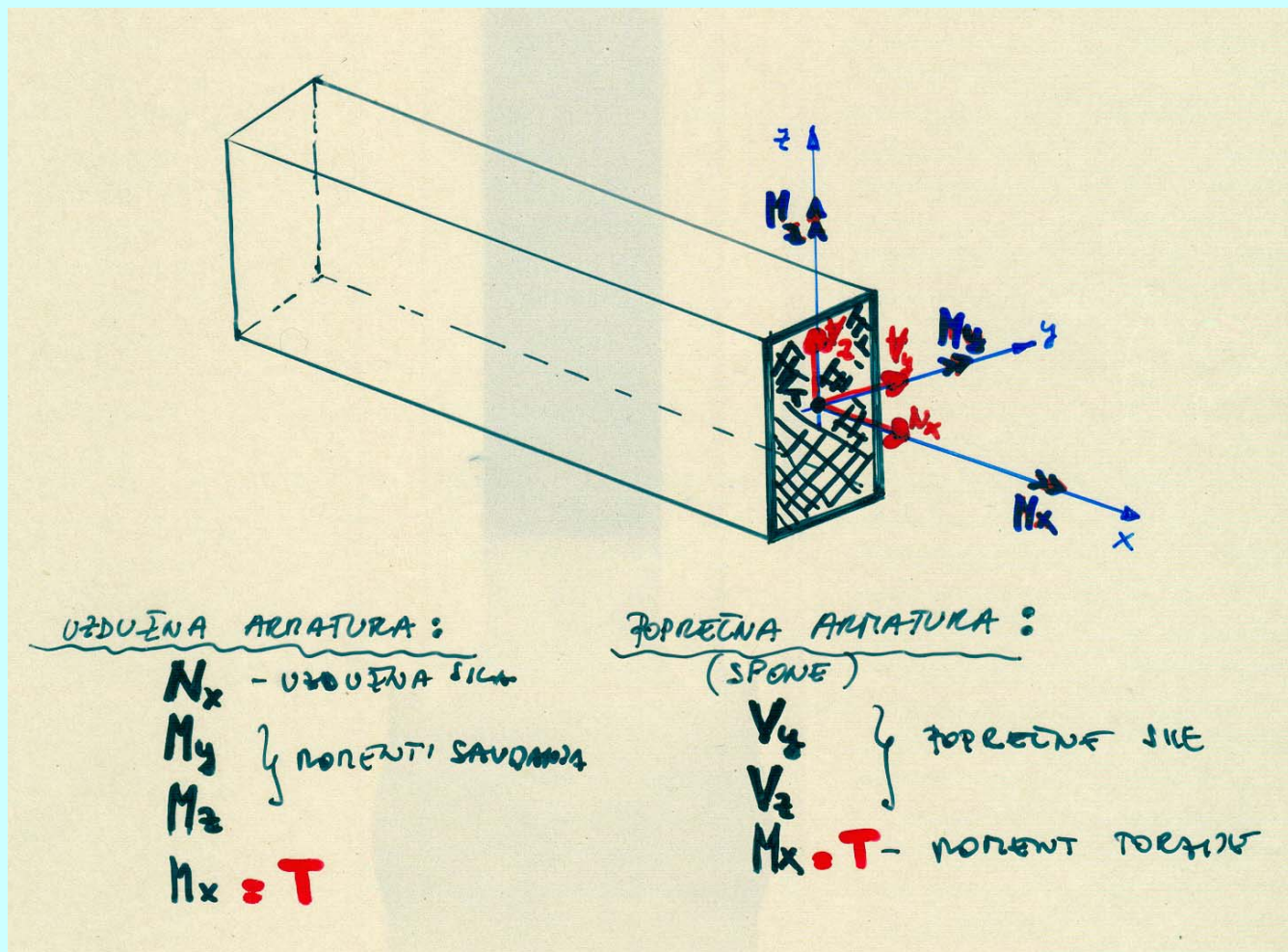
(god. 2007/2008.)

*Predmetni nastavnik:
V.pred. mr.sc. Vladica Herak-Marović, dipl.ing.građ.*

Nastavne jedinice kolegija:

- (1) Fizikalno mehanička svojstva betona i čelika za armiranje; deformacije betona;
- (2) Uvjeti zajedničkog rada betona i armature; prionljivost, sidrenje, nastavljajanje, oblikovanje, zaštitni slojevi; razmaci šipki; odredbe propisa;
- (3) Osnove proračuna armiranobetonskih elemenata prema GSN;
- (4) Dimenzioniranje presjeka na savijanje (pravokutni presjeci, T-presjeci, jednostruko i dvostruko armirani presjeci);
- (5) Dimenzioniranje presjeka na centrični i ekscentrični tlak i vlak;
- (6) **Dimenzioniranje na poprečne sile; dimenzioniranje na torziju;**
- (7) Lokalni tlačni naponi;
- (8) Vitki elementi naprezani centričnom i ekscentričnom tlačnom silom; stupovi;
- (9) Osnove proračuna armiranobetonskih elemenata prema GSU (naprezanja, pukotine, progibi);
- (10) Konstruiranje armature u različitim elementima konstrukcija; neki detalji; odredbe propisa.

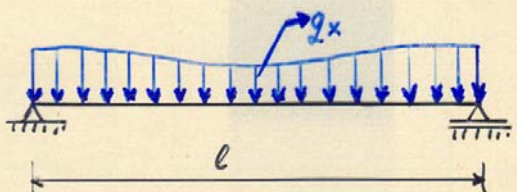
REZNE SILE U GREDI:



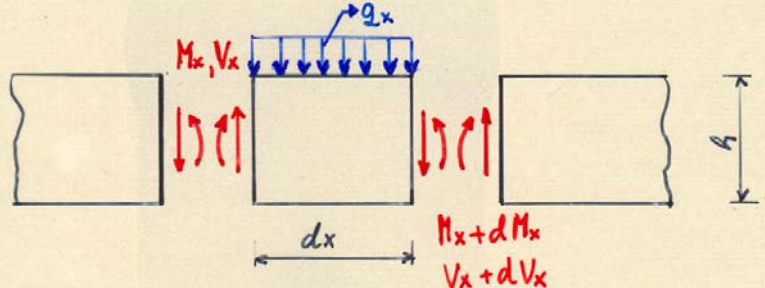
Glavni naponi u elementima naprežanim savijanjem

(a) Naponsko stanje I (bez pojave pukotina)

GREDA OPTEREĆENA PROJEKCIJOM OPTEREĆENJA



REŽNE SILE NA DIFERENCIJALNOJ DUŽINI GREDE

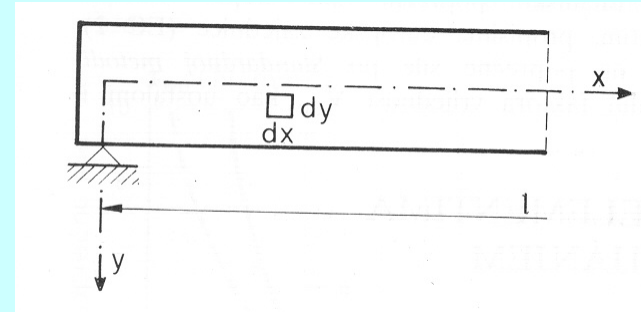


UZETI RAVNOTEŽE GLASE : $dV_x = -q_x \cdot dx$; $dM_x = V_x \cdot dx$
OPATLE SLIJEDEI : $\frac{dV_x}{dx} = -q_x$; $\frac{dM_x}{dx} = V_x$
ODNOSNO POSLIJE DERIVIRANJA : $\frac{d^2M_x}{dx^2} = \frac{dV_x}{dx} = -q_x$

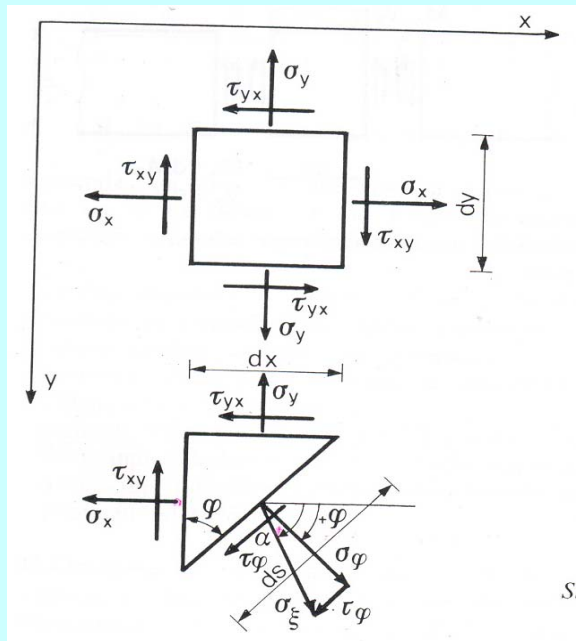
RAVNINSKO STANJE NAPREZANJA

(uzimamo da je raspodjela napona po širini grede jednaka):

- Promatramo element grede dx/dy :



Diferencijalno mali element grede dx/dy s odgovarajućim naponima:



σ_x – normalni napon u smjeru osi x
 σ_y – normalni napon u smjeru osi y
 τ_{xy} – posmični napon

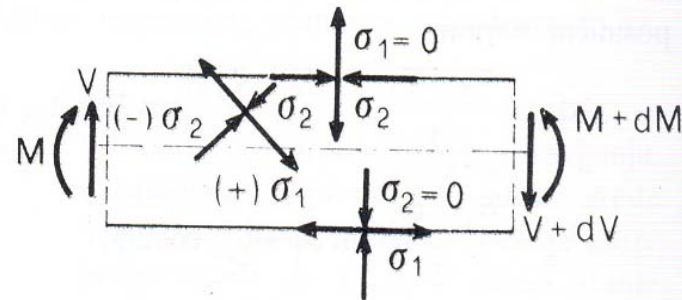
- Pod određenim kutem φ posmični naponi $\tau_\varphi = 0$, a normalni naponi dostižu maksimalnu vrijednost i to su glavni naponi (djeluju međusobno pod kutem od 90°):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Kod grednih nosača može se zbog svoje male vrijednosti s obzirom na napone σ_x i τ_{xy} , napon σ_y zanemariti ($\sigma_y = 0$), pa se izrazi za glavne napone pojednostavljaju:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Glavni kosi naponi u nekim točkama grede:



Uz rub nosača, trajektorije glavnih napona teku paralelno s njim, pa je kod nosača konstantnog pravokutnog presjeka:

Vlačni rub:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= 0; & \varphi &= 0, \\ \sigma_1 &= \sigma_x; & \sigma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Tlačni rub:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= 0; & \varphi &= 90^\circ, \\ \sigma_2 &= \sigma_x; & \sigma_1 &= 0. \end{aligned}$$

U neutralnoj su ravnini glavni naponi samo po vrijednosti jednaki posmičnima.

Za $\sigma_x = 0$ izlazi:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{0} = \infty,$$

odnosno:

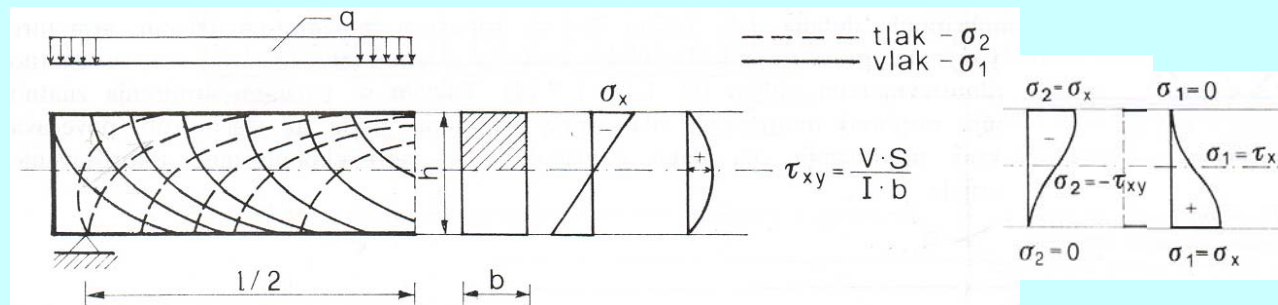
$$\varphi = 45^\circ,$$

pa su glavni kosi naponi:

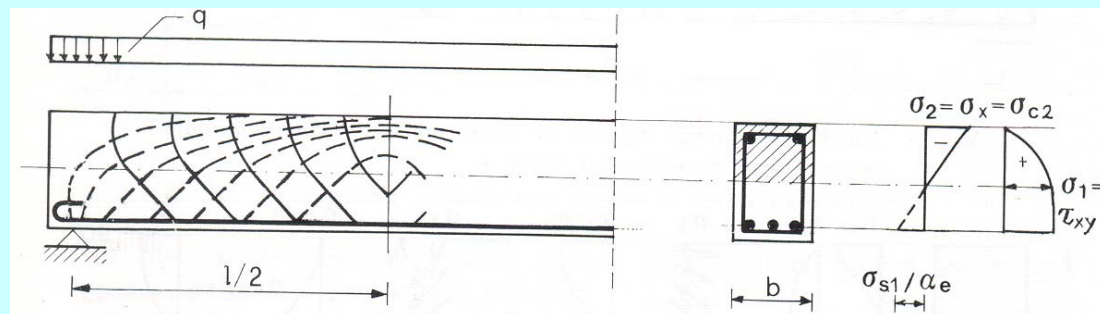
$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{xy}.$$

- Ako se glavni naponi odrede u više presjeka jednog nosača i njihovi pravci nanesu u tim presjecima, dobiva se niz krivulja napona σ_1 i σ_2 koje se sijeku pod kutem od 90° i zovu se trajektorije glavnih napona (ne pokazuju veličinu napona nego smjer napona).

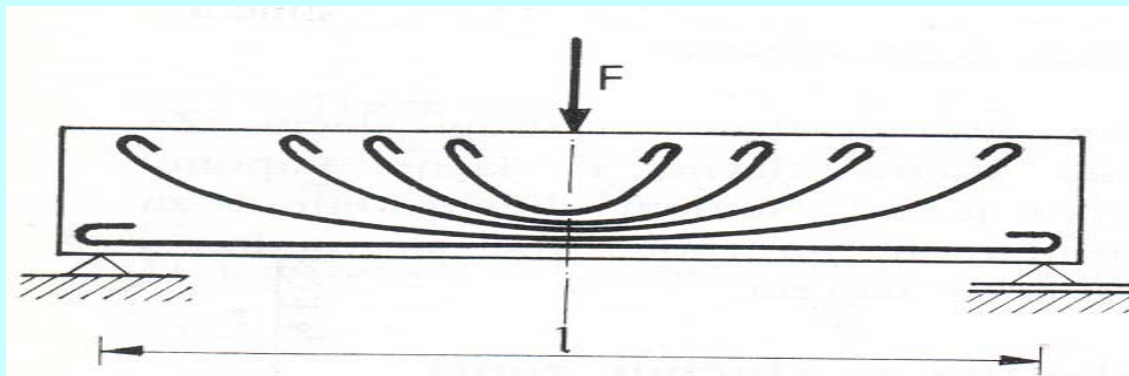
- **Naponsko stanje I (bez pojave pukotina)**



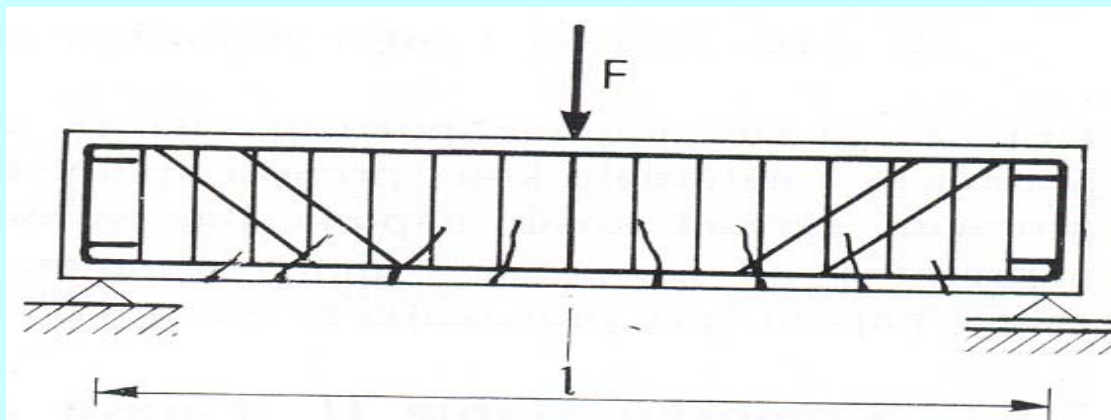
- **Naponsko stanje II (pojava pukotina u vlačnoj zoni, pa je vlačna zona presjeka isključena u prijenosu vlačnih napona)**



- Gredu bi trebalo armirati čeličnim šipkama oblikovanim tako da prate trajektorije vlačnih napona što bi u praksi dovelo do dugotrajnih proračuna i kompliciranih detalja.

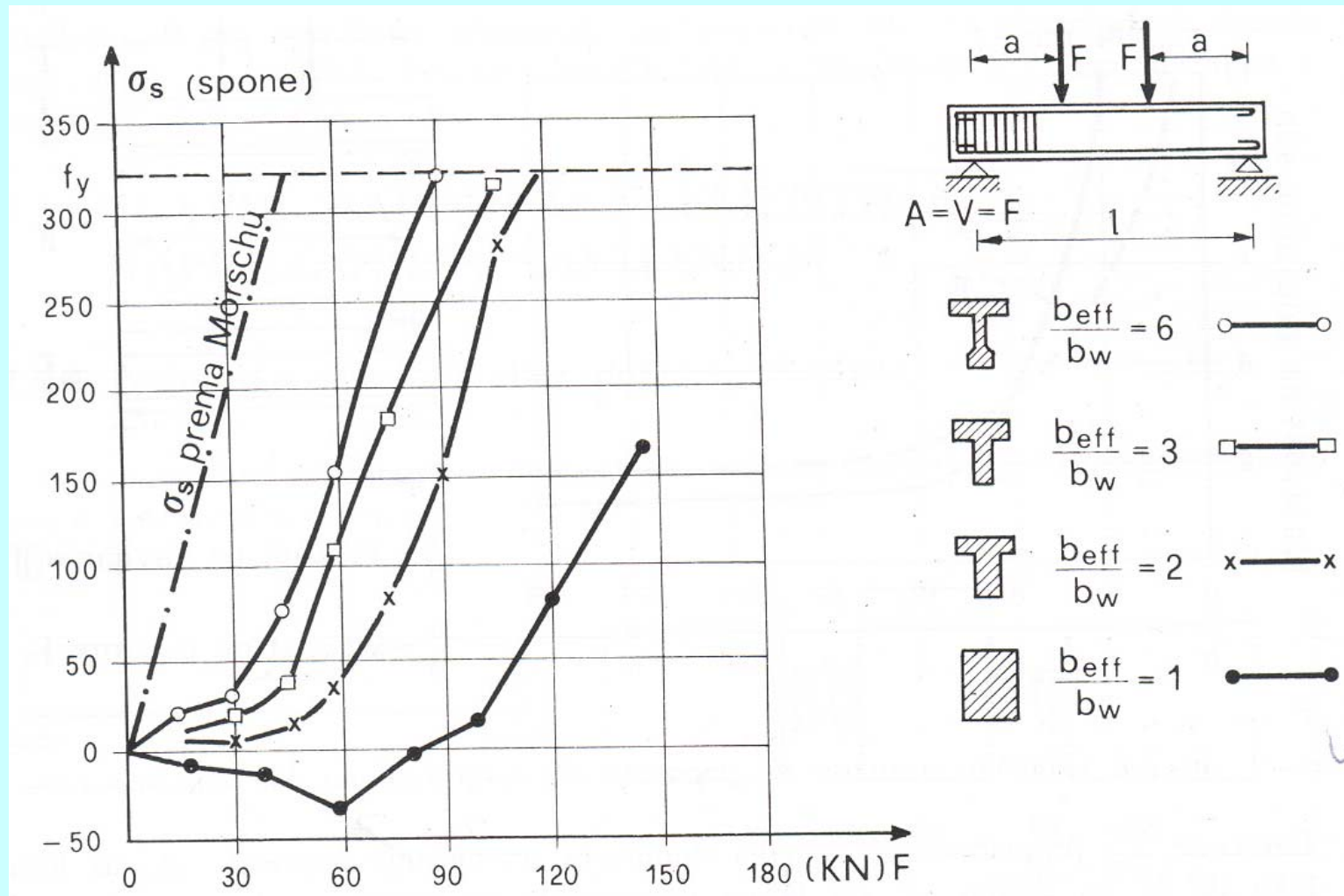


- To se izbjegava pojednostavljenjem armature (greda se armira ravnim i kosim šipkama te sponama), tako da armatura prati trajektorije vlaka samo u glavnim obrisima.



REZULTATI POKUSNOG ISPITIVANJA AB. GREDE

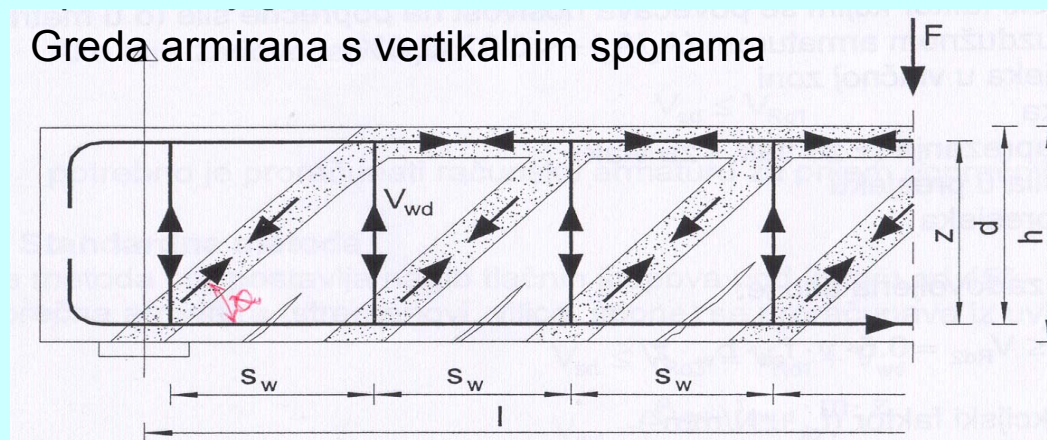
Dijagram napon-sila u sponama za različite poprečne presjeke grede:



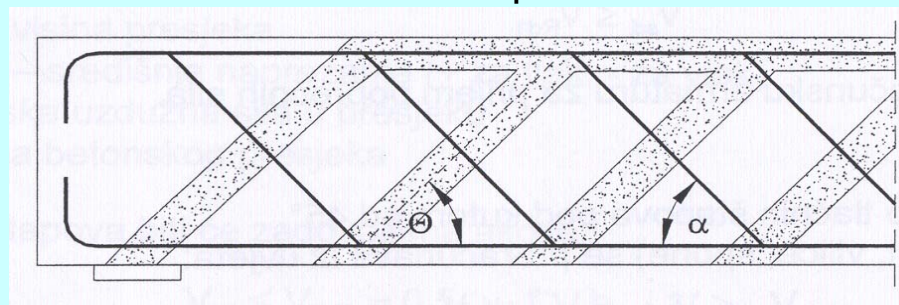
Dimenzioniranje presjeka na poprečne sile

REŠETKASTI NOSIVI MEHANIZAM FORMIRAN U GREDI

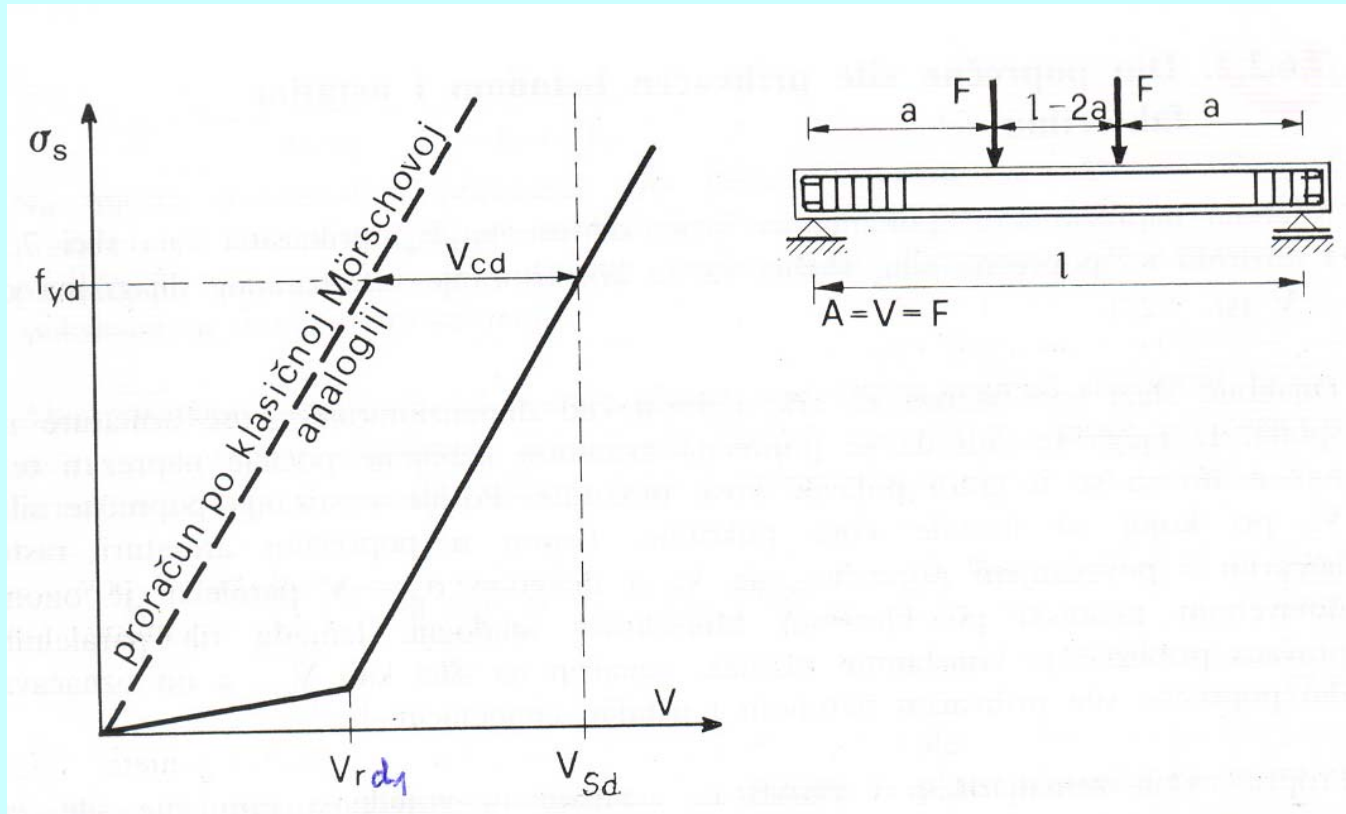
Dimenzioniranje greda na poprečne sile temelji se na proširenoj analogiji s Mörsch-Ritterovom rešetkom - poboljšana metoda (metoda graničnih stanja).



Greda armirana s kosim šipkama



- **Dijagram napona u sponi s obzirom na veličinu poprečne sile u promatranoj gredi:**



- kod sile V_{Rd1} nastaju kose pukotine i to je početak linearnog porasta napona u poprečnoj armaturi
- V_{cd} – dio poprečne sile prihvaćen betonom i ostalim čimbenicima

- Uvjet nosivosti na poprečne sile:

$$V_{Sd} \leq V_{Rd}$$

gdje je:

V_{Sd} – proračunska poprečna sila

V_{Rd} – proračunska nosivost na poprečne sile

- **Proračunska armatura za prihvaćanje poprečnih sila (tj. glavnih kosih vlačnih napona) neće biti potrebna ako je zadovoljen uvjet:**

$$V_{Sd} \leq V_{Rd1} = [\tau_{Rd} \cdot k \cdot (1.2 + 40 \cdot \rho_1) + 0.15 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d$$

gdje je:

τ_{Rd} – proračunska čvrstoća na djelovanje glavnih kosih napona

Tablica 5.11 Vrijednosti za τ_{Rd} (N/mm²) za pojedine čvrstoće betona

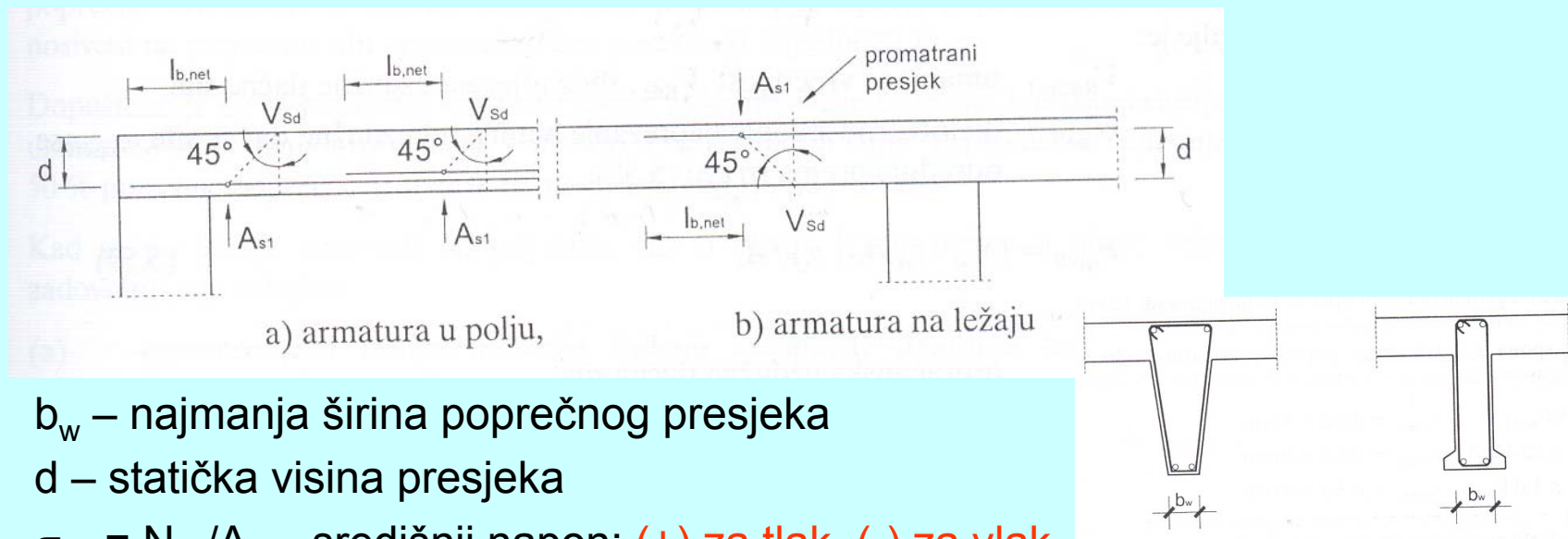
Razredi čvrstoće betona	C 12/15	C 16/20	C 20/25	C 25/30	C 30/37	C 35/45	C 40/50	C 45/55	C 50/60
τ_{Rd} N/mm ²	0,18	0,22	0,25	0,30	0,34	0,37	0,41	0,44	0,48

$k = 1.6 - d \geq 1.0$ – korekcijski faktor kojim se povećava nosivost na poprečne sile (d je u metrima)

ρ_1 – koeficijent armiranja uzdužnom armaturom

$$\rho_1 = A_{s1} / (b_w \cdot d) \leq 0.02$$

A_{s1} – ploština vlačne armature koja se sidri za najmanje $d + l_{b,net}$ iza promatranog presjeka



b_w – najmanja širina poprečnog presjeka

d – statička visina presjeka

$\sigma_{cp} = N_{sd} / A_c$ – središnji napon: (+) za tlak, (-) za vlak

N_{sd} – proračunska uzdužna sila u presjeku od opterećenja i prednapinjanja

A_c – ploština betonskog poprečnog presjeka

- Nosivost tlačnih štapova biti će zadovoljena ako je:

$$V_{Sd} \leq V_{Rd2} = 0.5 \cdot v \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot z$$

$v = 0.7 - (f_{ck}/200) \geq 0.5$ - redukcijski faktor (f_{ck} u N/mm²)
 $z \approx 0.9 \cdot d$ – krak unutrašnjih sila

- Ako u elementu djeluje **uzdužna tlačna sila**, potrebno je **reducirati nosivost tlačnih štapova** $V_{Rd2,red}$:

$$V_{Rd2,red} = 1.67 \cdot V_{Rd2} \cdot \left(1 - \frac{\sigma_{cp,eff}}{f_{cd}}\right) \leq V_{Rd2}$$

- Pri čemu je:

$$\sigma_{cp,eff} = \left(N_{sd} - f_{yk} \frac{A_{s2}}{\gamma_s} \right) / A_c \quad - \text{tlačno naprezanje u betonu}$$

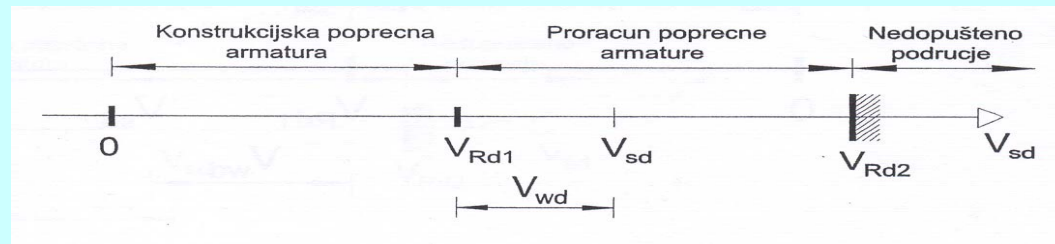
- **Potrebno je proračunati proračunsku armaturu za prihvaćanje poprečnih sila ako je:**

$$V_{Rd1} < V_{Sd} \leq V_{Rd2}$$

(a) Standardna (normirana) metoda

Ova metoda pretpostavlja nagib tlačnih štapova pod kutom od 45°. Poprečna armatura (spone) se proračunava iz uvjeta:

$$V_{Sd} \leq V_{Rd3} = V_{Rd1} + V_{wd}$$



odnosno nosivost **vertikalnih spona**:

$$V_{wd} = \frac{A_{sw}^1 \cdot f_{yw,d} \cdot m \cdot z}{s_w}$$

gdje je:

A_{sw}^1 – ploština jedne grane spona

m – reznost spona

z – krak unutrašnjih sila

s_w – razmak spona

$f_{yw,d}$ – proračunska granica popuštanja poprečne armature

Nosivost **kose armature** može se proračunati po izrazu:

$$V_{wd} = \frac{A_{sw} \cdot f_{yw,d} \cdot z}{s} \cdot (1 + \operatorname{ctg} \alpha) \cdot \sin \alpha$$

gdje je:

s – razmak kose armature mjeren uzduž osi elementa

α - kut nagiba kosih šipki prema osi nosača

(b) Metoda sa slobodnim odabirom nagiba tlačnih štapova

- Ova metoda se primjenjuje kada na presjek istodobno djeluje poprečna sila i moment torzije.

Nagib tlačnih štapova prema uzdužnoj osi se bira u granicama:

$21.8^\circ \leq \theta \leq 68.2^\circ \Rightarrow 0.4 \leq \text{ctg}\theta \leq 2.5$ kada se glavna uzdužna armatura vodi do ležaja

$26.6^\circ \leq \theta \leq 63.4^\circ \Rightarrow 0.5 \leq \text{ctg}\theta \leq 2.0$ kada se glavna uzdužna armatura postupno prekida u polju

Njemački propisi predlažu izraz:

$$\text{ctg}\theta = 1.25 - 3 \cdot \frac{\sigma_{\text{cp,eff}}}{f_{\text{cd}}} \quad \text{za } \sigma_{\text{cp,eff}} = 0, \quad \theta = 39^\circ$$

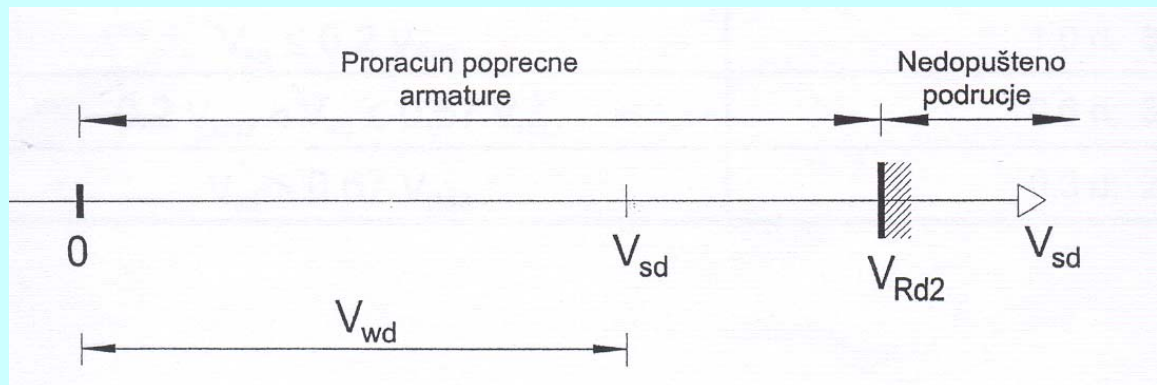
Kod elemenata s **vertikalnom poprečnom armaturom**, nosivost na poprečne sile:

$$V_{Rd2} = v \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot \frac{z}{\text{ctg}\theta + \text{tg}\theta};$$

$$V_{Rd3} = V_{wd} = \frac{A_{sw}^1 \cdot f_{yw,d} \cdot z \cdot m}{s_w} \cdot \text{ctg}\theta \quad ;$$

uz uvjet: $\left(\frac{A_{sw}^1 \cdot f_{yw,d} \cdot m}{b_w \cdot s_w} \leq \frac{1}{2} \cdot v \cdot f_{cd} \right)$

$$s_w = \frac{A_{sw}^1 \cdot f_{yw,d} \cdot z \cdot m}{V_{Sd}} \cdot \text{ctg}\theta$$



Kod elemenata s **kosom poprečnom armaturom**, nosivost na poprečne sile:

$$V_{Rd2} = v \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot z \cdot \frac{\operatorname{ctg}\theta + \operatorname{ctg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2\theta};$$

$$V_{Rd3} = V_{wd} = \frac{A_{sw} \cdot f_{yw,d} \cdot z}{s} (\operatorname{ctg}\theta + \operatorname{ctg}\alpha) \cdot \sin\alpha$$

$$\text{uz uvjet : } \left(\frac{A_{sw} \cdot f_{yw,d}}{b_w \cdot s_w} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{v \cdot f_{cd} \cdot \sin\alpha}{1 - \cos\alpha} \right)$$

Nakon pojave pukotina u nosaču, sila u donjem pojasu će biti:

$$F_{sd} = \frac{M_{sd}}{z} + \frac{1}{2} \cdot V_{sd} \cdot (\operatorname{ctg}\theta - \operatorname{ctg}\alpha)$$

te je za drugi član potrebno povećati uzdužnu armaturu u polju.

Minimalna armatura

Ukupna poprečna armatura (spone) ne smije biti manja od minimalne $A_{sw,min}^1$:

$$A_{sw,min}^1 = \frac{\rho_{w,min} \cdot s_{w,max} \cdot b_w}{m}$$

Tablica 5.13.

Razred čvrstoće betona	Čelik za armiranje B 500
C 12/15 i C 20/25	$\rho_{w,min} = 0,0007$
C 25/30 do C 35/45	$\rho_{w,min} = 0,0011$
C 40/50 do C 50/60	$\rho_{w,min} = 0,0013$

A_{sw}^1 – ploština jedne grane spona

$\rho_{w,min}$ - minimalni koeficijent armiranja poprečnom armaturom

m – reznost spona

b_w – najmanja širina poprečnog presjeka

$s_{w,max}$ – najveći razmak spona

Promjer poprečne armature od glatkih okruglih šipki ne treba premašiti 12 mm.

Najveći uzdužni razmak spona $s_{w,max}$ ili druge poprečne armature određen je ovim uvjetima (sa V_{Sd} , V_{Rd1} i V_{Rd2}):

- kad je $(0 < V_{Sd} \leq 1/5 V_{Rd2})$ $s_{w,max} = 0,8 d \leq 30 \text{ cm}$
- kad je $(1/5 V_{Rd2} < V_{Sd} \leq 2/3 V_{Rd2})$ $s_{w,max} = 0,6 d \leq 30 \text{ cm}$
- kad je $(2/3 V_{Rd2} < V_{Sd} \leq 1,0 V_{Rd2})$ $s_{w,max} = 0,3 d \leq 20 \text{ cm}$.

Uzdužni razmak povijenih šipki ne smije premašiti ovu vrijednost:

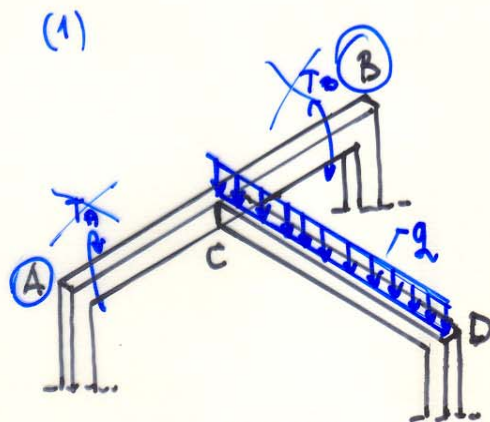
$$s_{w,max} \leq 0,6 \cdot d (1 + \text{ctg}\alpha).$$

Poprečni razmak vertikalnih krakova spona ne smije premašiti ovu vrijednost:

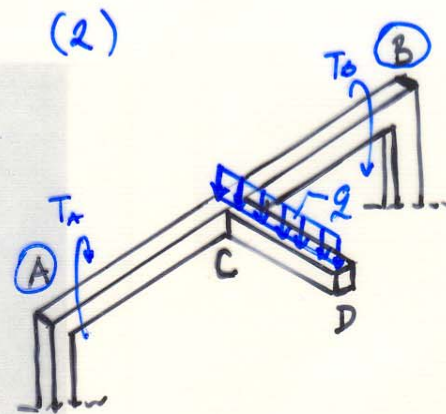
- kada je $V_{Sd} \leq 1/5 V_{Rd2}$, treba primijeniti manju vrijednost od $s_{w,max} = d$ ili 800 mm,
- kod $V_{Sd} > 1/5 V_{Rd2}$ vrijedi za $(1/5 V_{Rd2} < V_{Sd} \leq 2/3 V_{Rd2})$: $s_{w,max} = 0,6 d \leq 300 \text{ mm}$ ili
za $(2/3 V_{Rd2} < V_{Sd} \leq 1,0 V_{Rd2})$: $s_{w,max} = 0,3 d \leq 200 \text{ mm}$.

ELEMENTI NAPREZANI TORZIJOM

RAZLIKUJE SE ; (1) KOMPATIBILNA (SEKUNDARNA) TORZIJA
 (2) RAVNOTEŽNA (PRIMARNA) TORZIJA



KOD STATIČKI NEODREĐENIM KONSTRUKCIJAMA, TORZIJA NIJE PRIJELO POTREBNA ZA RAVNOTEŽU, ZAVIŠTAJUĆE SE (NASTAJE ZBOG KRUTE VEŠE) STAJE SE DA JE KONSTRUKCIJA SIGURNA AKA SU K_1, V I N U RAVNOTEŽI S VANJSKIM DJELOVANJEM, DOVOLNO PREDVIDJET MINIMALNU ARMATURU ZA SEKUNDARNU TORZIJU



TORZIJA BITNA ZA RAVNOTEŽU, PRORAČUN NA TORZIJU TREBA BITI PROVEDEN !

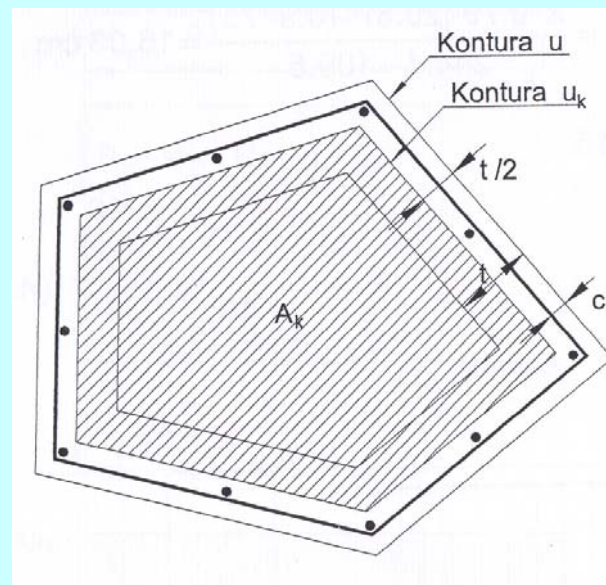
Dimenzioniranje presjeka na moment torzije

Momenti torzije uzrokuju samo posmične napone, pa će glavni kosi naponi biti jednaki posmičnim naponima, tj. $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_t$.

Proračun elemenata naprezanih torzijom provodi se uporabom modela oblika prostorne rešetke.

Nagib tlačnih štapova slobodno se odabire u granicama navedenim pri proračunu na poprečne sile.

Torzijska nosivost presjeka proračunava se uz pretpostavku tankostijenog zatvorenog presjeka. Puni presjeci zamjenjuju šupljim presjecima debljine t .



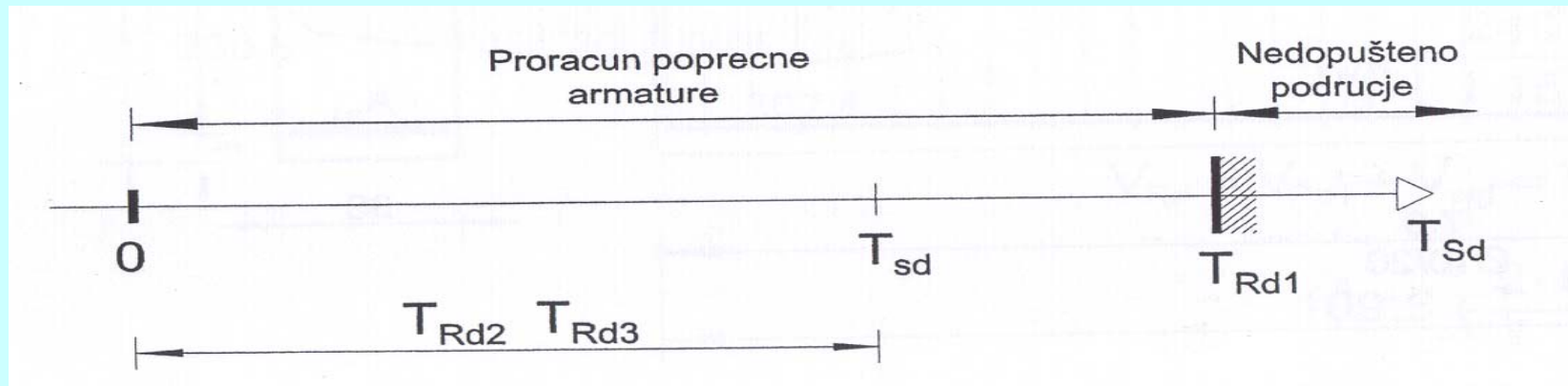
- Uvjet nosivosti na moment torzije:

$$T_{Sd} \leq T_{Rd}$$

gdje je:

T_{Sd} – proračunska moment torzije

T_{Rd} – proračunska nosivost na torziju



- Nosivost tlačnih štapova biti će zadovoljena ako je:

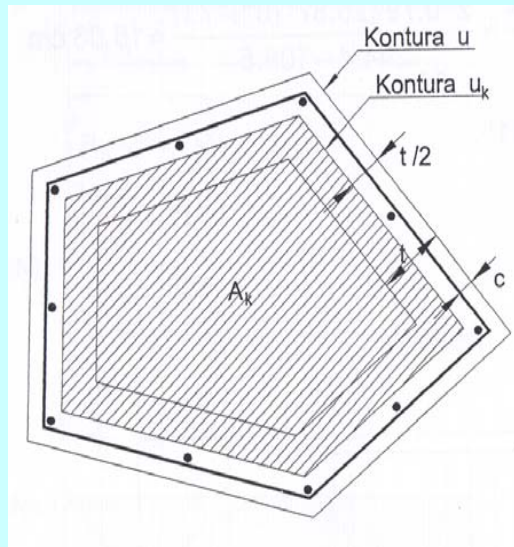
$$T_{Sd} \leq T_{Rd1} = \frac{2 \cdot v' \cdot f_{cd} \cdot A_k \cdot t}{ctg\theta + tg\theta}$$

$$v' = 0.7 \cdot \left(0.7 - \frac{f_{ck}}{200} \right) \geq 0.35$$

$$v' = v = 0.7 - \frac{f_{ck}}{200} \geq 0.5$$

- redukcijski faktor tlačne čvrstoće betona u kosim štapovima elementa armiranog sponama (f_{ck} u N/mm²)

- ako su spone s obje strane šupljeg presjeka ili na svakoj stjenki sandučastog presjeka



θ - kut između betonskih tlačnih štapova i uzdužne osi nosača koji mora zadovoljiti uvjet

$$0.4 \leq ctg\theta \leq 2.5 \text{ ili } 21.8^\circ \leq \theta \leq 61.2^\circ$$

$t=A/u$ – debljina stjenke zamjenjujućeg šupljeg presjeka

A_k – ploština unutar srednje konture; $A_k = (b-t) \cdot (h-t)$

u – opseg vanjske konture

A – ukupna ploština presjeka

- Površina poprečne armature (ili razmak s_w) za prihvaćanje momenta torzije određuje se iz uvjeta:

$$T_{Sd} \leq T_{Rd2} = 2 \cdot A_{swT}^1 \cdot A_k \cdot f_{yw,d} \cdot \frac{\text{ctg}\theta}{s_w}$$

- Površina uzdužne armature za prihvaćanje momenta torzije određuje se iz uvjeta:

$$T_{Sd} \leq T_{Rd3} = 2 \cdot A_{sIT} \cdot A_k \cdot f_{yl,d} \cdot \frac{\text{tg}\theta}{u_k}$$

gdje je:

A_{swT}^1 – ploština presjeka jedne grane spone na razmaku s_w ($s_w \leq u_k/8$)

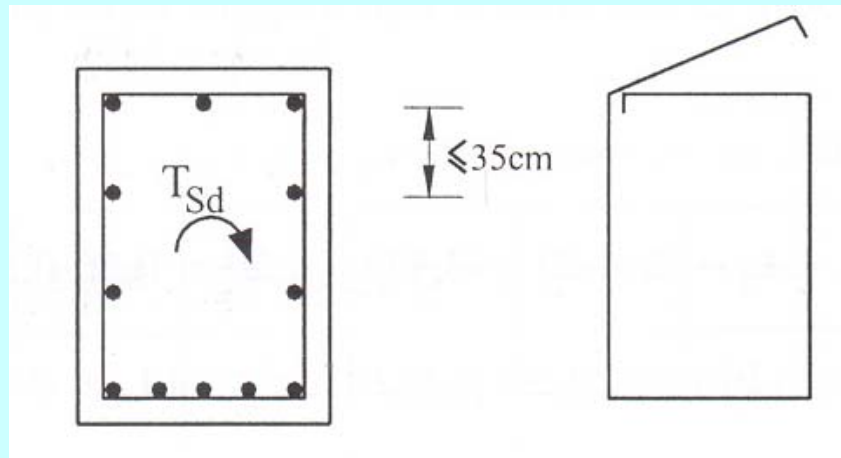
A_{sIT} – ploština svih uzdužnih šipki torzijske armature (raspoređuju se jednoliko po opsegu, s tim da u svakom kutu po jednu šipku na razmaku ne većem od 35 cm)

$f_{yw,d}$; $f_{yl,d}$ – računске granice popuštanja poprečne i uzdužne armature

u_k – opseg jezgre ploštine A_k ; $u_k = 2 \cdot [(b-t)+(h-t)]$

Torzijska armatura mora se sastojati od zatvorenih spona i uzdužne armature raspoređene po opsegu presjeka. U svakom kutu presjeka mora se predvidjeti barem jedna uzdužna šipka.

Armiranje pravokutnog presjeka pri djelovanju momenta torzije:



Proračunsko posmično naprežanje uzrokovano momentom torzije iznosi:

$$\tau_{Sd} = \frac{T_{Sd}}{2 \cdot A_k \cdot t} \quad (5.104)$$

1) Minimalna i maksimalna ukupna uzdužna torzijska armatura

a) $A_{sIT,min} = 0,0015 b_w d$ za uzdužnu armaturu B 500

b) razmak uzdužne armature ≤ 35 cm

c) $A_{sIT,max} = 0,0400 b_w d$

2) Minimalna poprečna torzijska armatura = maksimalni razmak torzijskih spona

a) $s_{w,max} = A_{swT}^1 / (\rho_{w,min} b_w \sin \alpha)$ za $\rho_{w,min}$ = (vidi tablicu 5.13)

b) $s_{w,max} = u_k / 8$

Mjerodavna je manja vrijednost za $s_{w,max}$.

TORZIJA I POPREČNA SILA

Treba biti zadovoljen uvjet:

$$\left(\frac{T_{Sd}}{T_{Rd1}} \right)^2 + \left(\frac{V_{Sd}}{V_{Rd2}} \right)^2 \leq 1$$

gdje je:

T_{Rd1} – proračunska nosivost presjeka na torzijski moment (kNm)

$V_{Rd2} = v \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot \frac{z}{\text{ctg}\theta + \text{tg}\theta}$ - proračunska nosivost tlačnih štapova (kN)

ili $V_{Rd2} = 0.5 \cdot v \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot z$ - prorač. nosivost tl. štapova (standardna m.)

Proračun spona provodi se odvojeno za prihvaćanje torzije (s_{wT}) i odvojeno za poprečnu silu (s_w).

Konačni razmak spona (s) je:

$$s = \frac{s_w \cdot s_{wT}}{s_w + s_{wT}}$$

Kut nagiba θ tlačnih betonskih štapova uzima se isti za torziju i poprečnu silu.

TORZIJA SA SAVIJANJEM I/ILI UZDUŽNOM SILOM

U vlačnom području zbog savijanja treba torzijsku uzdužnu armaturu dodati armaturi potrebnoj za preuzimanje naprezanja zbog savijanja i uzdužne sile. U tlačnom području redovito nije potrebno dodavati armaturu zbog torzije, jer je ona često manja od konstruktivne.

Kad istodobno djeluje moment torzije i veliki moment savijanja (sandučasti presjeci), može biti kritično glavno naprezanje u tlačnom području od savijanja, pa valja zadovoljiti uvjet:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{Sd}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Sd}}{2}\right)^2 + \tau_{Sd}^2} \leq 0.85 \cdot f_{cd}$$

$$\sigma_{Sd} = \frac{M_{Sd}}{z \cdot b \cdot t}$$

$$\tau_{Sd} = \frac{T_{Sd}}{2 \cdot A_k \cdot t}$$

- Računsko normalno tlačno naprezanje koje se uvrštava s predznakom +

- Računsko posmično naprezanje uzrokovano torzijom